ΘΕΩΡΗΜΑ GREEN (SOS)

Έστω $B \subset \mathbb{R}^2$ ένα κανονικό χωρίο ως προς τους άξονες x και y (ή τύπου 3) το σύνορο ∂B του οποίου περιγράφεται από μια κατά τμήματα C^1 καμπύλη και έστω $f = \binom{P}{Q} : A \to \mathbb{R}^2$ με $B \subset A \subset \mathbb{R}^2$, A ανοιχτό συνεχώς διαφορίσιμο. Τότε, αν διατρέξουμε το ∂B (μια φορά) ως προς τον μαθηματικά θετικό προσανατολισμό και έχουμε $\int_{\partial B} (P,Q) \cdot d(x,y) =$
$= \int_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot d(x,y)$

(Δηλ. από τη μία έχουμε ένα επικαμπύλιο και από την άλλη ένα διπλό ολοκλήρωμα)

ΠΟΡΙΣΜΑ:

Αν το B είναι όπως στο Θ. Green. Τότε, το εμβαδόν του B είναι $v(B) = \frac{1}{2} \int_{\partial B} (-y, x)\, d(x,y)$
(όπου ∂B διαγράφεται μια φορά κατά τη θετική φορά)

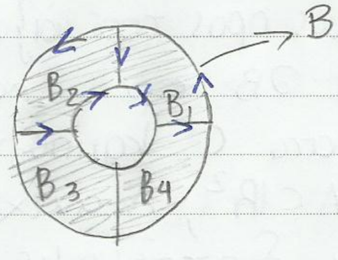
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Μια κλειστή απλή (κανονική) καμπύλη λέμε ότι διατρέχεται κατά τη (μαθηματικά) θετική φορά (ή με θετικό προσανατολισμό) αν διατρέχεται αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού ή έτσι ώστε το B που θα φράσσεται από το ∂B να βρίσκεται πάντα στα αριστερά μας ως προς την κατεύθυνση στην οποία κινούμαστε

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ:

Το Θεώρημα GREEN ισχύει και σε συνεκτικά υποσύνολα $B \subset \mathbb{R}^n$ τα οποία μπορούν να διασπαστούν σε B_i για $i = 1, 2, \ldots, n$ (με B_i να ικανοποιούν τις συνθήκες του θεωρήματος)

Πχ



Άρα, εφαρμόζεται το Θ. Green.

ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ: Το $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \le 0\}$ είναι αστερόμορφο (αφού μπορώ να ενώσω με ένα ευθύγραμμο τμήμα που βρίσκεται (ολόκληρο) μέσα στο σύνολο από το σημείο $(1,0)$ με κάθε σημείο $(-x,y)$ όπου $x>0$ και $y>0$).

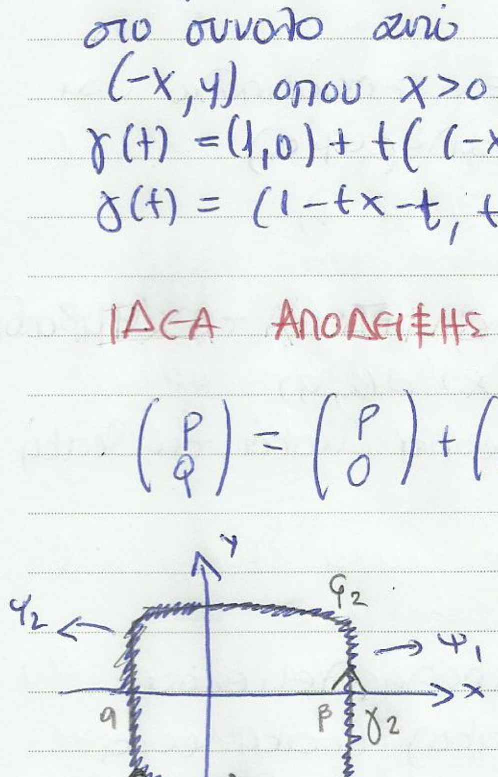
$\gamma(t) = (1,0) + t((-x,y)-(1,0)) \quad t\in[0,1]$

$\gamma(t) = (1-tx-t, ty) = (1-t(1+x), ty) \left(\begin{matrix} t>0 \text{ εάν } ty>0 \\ t=0 \text{ εάν } \gamma(0)=(1,0) \end{matrix} \right)$

ΙΔΕΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ Θ. GREEN (ΣΕ ΣΤΟΙΧ. ΕΠΙΠΕΔΟ)

$\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Q \end{pmatrix} \qquad B = \{(x,y) : x\in[a,\beta],\ y\in[\varphi_1(x),\varphi_2(x)]\}$

$= \{(x,y) : y\in[\gamma,\delta],\ x\in[\psi_1(y),\psi_2(y)]\}$



με $\partial B = \bigcup_{i=1}^{4} \gamma_i([0,1])$ με

$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} a+t(\beta-a) \\ \varphi_1(a+t(\beta-a)) \end{pmatrix}$

για $t=0 \rightarrow \gamma_1(0) = (a, \varphi_1(a))$

για $t=1 \rightarrow \gamma_1(1) = (\beta, \varphi_1(\beta))$

$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \beta \\ \varphi_1(\beta) + t(\varphi_2(\beta)-\varphi_1(\beta)) \end{pmatrix}$

$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} \beta - t(\beta-a) \\ \varphi_2(\beta - t(\beta-a)) \end{pmatrix}, \quad \gamma_4(t) = \begin{pmatrix} a \\ \varphi_2(a) - (\varphi_2(a) - \varphi_1(a) \end{pmatrix}$